ÉPREUVE de MATHÉMATIQUES 1

SESSION DE 1996

Durée : 4 heures – Coefficient : 6

L'usage des calculatrices programmables et alphanumériques est autorisé sous réserve des dispositions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Il est rappelé aux candidats qu'il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction des copies.

On désigne par $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des applications continues 2π-périodiques de **R** dans **C** que l'on munit de la norme : $N_\infty : f \mapsto \sup_{0\le t\le 2\pi} |f(t)|$.

On rappelle que l' application $(f, g) \mapsto \langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$ est un produit scalaire hermitien sur $\mathcal{C}$ et l'on note $f \mapsto N_2(f)$ la norme hermitienne associée. On pose enfin pour tout $f \in \mathcal{C}$, $N_1(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$.

Pour tout élément k de **Z**, on note e_k la fonction $t \mapsto e^{ikt}$. On désigne par **P** le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ engendré par les fonctions e_k, où k décrit **Z** ; les éléments de **P** sont les polynômes trigonométriques. On note $\mathbf{P}_n$ le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions e_k où $|k| \le n$. Pour tout élément f de $\mathcal{C}$ et tout $k \in \mathbf{Z}$, on note $c_k(f) = \langle e_k | f \rangle$ le k$^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de f et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $S_n(f)$ la n$^{\text{ième}}$ somme partielle de la série de Fourier de f définie par $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k$.

L'objet du problème est d'étudier des procédés d'approximation tant du point de vue qualitatif que quantitatif des fonctions continues ou lipschitziennes par des polynômes trigonométriques. Les deux dernières parties utilisent les résultats obtenus pour résoudre deux problèmes l'un de nature algébrique, l'autre de nature géométrique.

I. Exemples de polynômes trigonométriques.

1. Noyau de Dirichlet.

Pour tout entier naturel n, on pose : $D_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k$.

a. Établir que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout t réel,

$$D_n(t) = \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \text{ si } t \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z} \text{ et } 2n+1 \text{ si } t \in 2\pi\mathbf{Z}.$$

b. Soit n entier naturel. Montrer que la fonction $f_n : t \mapsto D_n(t) - 2\dfrac{\sin(n+1)t}{t}$ se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0, \pi]$.

Montrer que $f_n(t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f_n(t) = \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2} - \sin(n+1)t}{\sin\frac{t}{2}} + \sin(n+1)t\,\frac{\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}}$$

et en déduire qu'il existe M réel tel que, pour $n \in \mathbf{N}$ et $t \in]0, \pi]$, $|f_n(t)| \leq M$.

Établir enfin que, pour tout entier naturel n,

$$N_1(D_n) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(n+1)t|}{t}\,dt + u_n$$

où $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite bornée.

c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\int_0^{\pi} \frac{|\sin(n+1)t|}{t}\,dt = \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+k\pi}\,dt.$$

En utilisant l'égalité

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+k\pi}\,dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{(k+1)\pi}\,dt + \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{t+k\pi} - \frac{1}{(k+1)\pi}\right)\sin t\,dt,$$

en déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\int_0^{\pi} \frac{|\sin(n+1)t|}{t}\,dt = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} + v_n$$

où $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite bornée.

d. Prouver finalement que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$N_1(D_n) = \frac{4}{\pi^2}\ln(n+1) + r_n$$

où (r_n) est une suite bornée.

2. Noyau de Féjer.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $K_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k$.

a. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $k \in \mathbf{Z}$, établir que

$$c_k(K_n) = 1 - \frac{|k|}{n+1} \quad \text{si} \quad |k| \leq n, \ 0 \text{ sinon.}$$

En déduire que

$$K_n = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)e_k.$$

b. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $t \in \mathbf{R}$, établir que

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 \quad \text{si } t \in \mathbf{R}\backslash 2\pi\mathbf{Z},\ n+1 \text{ si } t \in 2\pi\mathbf{Z}.$$

En conclure que, pour $n \in \mathbf{N}$, K_n est un polynôme trigonométrique pair à valeurs positives.

c. Prouver que tout $n \in \mathbf{N}$, $N_1(K_n) = 1$.

Établir que pour $0 < \alpha \leq \pi$, $\lim_{n\to+\infty} \int_\alpha^\pi K_n(t)dt = 0$.

II. Convolution des fonctions périodiques.

1. Soit $f \in \mathcal{C}$. Prouver que pour tout nombre réel a,

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt.$$

2. Montrer que pour tout couple (f, g), d'élément de $\mathcal{C}$, la fonction $f * g$ définie sur $\mathbf{R}$ par la formule

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt$$

appartient à $\mathcal{C}$.

Vérifier que $g * f = f * g$.

Prouver que $N_\infty(f * g) \leq N_1(g)N_\infty(f)$.

3. Soit $f \in \mathcal{C}$. Établir que pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $f * e_k = c_k(f)e_k$.

En déduire pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $P \in \mathbf{P}_n$ que $f * P \in \mathbf{P}_n$. En particulier, vérifier que $f * D_n = S_n(f)$.

4. Approximation des fonctions continues par la méthode de Féjer.

Soit f un élément de $\mathcal{C}$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) - f * K_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t))K_n(t)dt.$$

b. Établir que pour $\alpha \in]0, \pi]$,

$$N_\infty(f - f * K_n) \leq \omega_f(\alpha) + \frac{2}{\pi}N_\infty(f)\int_\alpha^\pi K_n(t)dt$$

où $\omega_f(\alpha) = \sup_{|s-t|\leq\alpha} |f(s) - f(t)|$.

c. À l'aide de **L2.c)**, montrer que $\lim_{n\to+\infty} N_\infty(f - f * K_n) = 0$.

d. Applications :

(i) Prouver que la fonction f est nulle si et seulement si $c_k(f) = 0$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

(ii) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, montrer que $N_2(f - S_n(f)) \leq N_\infty(f - f * K_n)$.

En déduire que $\lim_{n\to+\infty} N_2(f - S_n(f)) = 0$.

En écrivant que $(N_2(f))^2 = (N_2(f - S_n(f)))^2 + (N_2(S_n(f)))^2$ prouver que

$$(N_2(f))^2 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 .$$

En conclure que pour tout couple (f, g) d'élément de $\mathcal{C}$,

$$\langle f | g \rangle = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k(f)}\, c_k(g) .$$

5. Approximation des fonctions lipschitziennes.

Soit $f \in \mathcal{C}$ lipschitzienne dans le rapport $\lambda(f)$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $N_\infty(f - f * K_n) \leq \dfrac{\lambda(f)}{\pi} \int_0^\pi t K_n(t)\,dt$.

b. Vérifier que la fonction $u \mapsto \dfrac{u}{\sin u}$ se prolonge en fonction continue sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Soit m sa borne supérieure sur ce segment. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\int_0^\pi t K_n(t)\,dt \leq \frac{4m^2}{n+1} \int_0^{\frac{(n+1)\pi}{2}} \frac{\sin^2 y}{y}\,dy .$$

En écrivant par exemple que

$$\int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 y}{y}\,dy \leq \int_0^1 y\,dy + \int_1^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{y},$$

conclure qu'il existe un nombre réel μ tel que pour tout $n \geq 1$ et tout $f \in \mathcal{C}$ lipschitzienne,

$$N_\infty(f - f * K_n) \leq \mu \frac{\ln(n+1)}{n+1} \lambda(f).$$

c. Applications.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que pour $P \in \mathbf{P}_n$,

$$f - S_n(f) = (f - P) + (P - f) * D_n .$$

En déduire que pour $n \geq 1$,

$$N_\infty(f - S_n(f)) \leq \mu \frac{\ln(n+1)}{n+1} \lambda(f) \left(\frac{4}{\pi^2} \ln(n+1) + r_n + 1\right).$$

Que peut-on en conclure ?

6. Approximation des fonctions höldériennes.

Soit $f \in \mathcal{C}$. On suppose qu'il existe $\gamma \in]0,1[$ et $\lambda(f)$ réel tel que pour tout couple (s, t) de nombres réels,

$$|f(s) - f(t)| \leq \lambda(f) |s - t|^\gamma .$$

a. Exemple.

Montrer que la fonction 2π-périodique paire qui coïncide sur $[0, \pi]$ avec la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ vérifie une condition de ce type.

b. Montrer par un procédé analogue à celui de **II.5)** que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$N_\infty(f - f * K_n) \leq \frac{\lambda(f)}{\pi} \frac{2^{1+\gamma} m^2}{(n+1)^\gamma} \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 y}{y^{2-\gamma}}\, dy .$$

En déduire qu'il existe un réel $\mu'(\gamma)$ tel que : $N_\infty(f - f * K_n) \leq \frac{\mu'(\gamma)}{(n+1)^\gamma} \lambda(f)$.

Conclure.

III. Convolutions et translations.

1. Soient f et g deux éléments de $\mathcal{C}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

$$c_k(f * g) = c_k(f) c_k(g) .$$

En déduire que la loi $(f, g) \mapsto f * g$ est associative. Cette loi possède-t-elle un élément neutre ?

2. Soit $\phi \in \mathcal{C}$.

a. Pour tout $a \in \mathbf{R}$, on note ϕ_a la translatée de ϕ définie par $\phi_a(t) = \phi(t - a)$. Vérifier que, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $c_k(\phi_a) = \overline{e_k(a)} c_k(\phi)$.

b. On note E_ϕ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ engendré par les translatées ϕ_a de ϕ lorsque a parcourt **R**. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\psi \in E_\phi$ tel que $N_\infty(f * \phi - \psi) \leq \varepsilon$.

(On pourra approcher l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\phi(x-t)dt$ par une somme de Riemann en observant que la fonction $(x,t) \mapsto f(t)\phi(x-t)$ est uniformément continue sur $\mathbf{R} \times [-\pi, \pi]$).

c. On note T_ϕ l'application de $\mathcal{C}$ dans lui-même ainsi définie : $T_\phi(f) = f * \phi$.

(i) Vérifier que T_ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{C}$. Déterminer les valeurs propres de T_ϕ. Montrer que pour toute valeur propre λ non nulle de T_ϕ, le sous-espace propre $E_\lambda(T_\phi)$ associé à λ est de dimension finie et en donner une base.

(ii) On suppose que tous les coefficients de Fourier de ϕ sont non nuls. Montrer que dans ces conditions T_ϕ est injectif et que T_ϕ induit un isomorphisme de **P** sur lui-même. En déduire que l'adhérence de E_ϕ est égale à $\mathcal{C}$.

d. On suppose dans cette question que E_ϕ est de dimension finie et on note X la partie de **Z** constituée des entiers k tels que $c_k(\phi) \neq 0$. Montrer que E_ϕ n'est autre que le sous-espace vectoriel de **P** engendré par les fonctions e_k où k décrit X.

IV. Inégalité isopérimétrique.

Soit E un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note $\|.\|$ la norme euclidienne de l'espace vectoriel $\vec{E}$ associé à E.

Soit $\gamma : [0, 2\pi] \mapsto E$ un arc paramétré de classe C^1, régulier de longueur L satisfaisant de plus aux conditions suivantes :

(i) la restriction de γ à $[0, 2\pi[$ est injective,

(ii) $\gamma(2\pi) = \gamma(0)$,

(iii) $\gamma'(2\pi) = \gamma'(0)$.

On note A l'aire du domaine borné délimité par γ. On se propose d'établir l'inégalité $L^2 \geq 4\pi A$ et d'étudier le problème de l'égalité dans cette inégalité.

Vérifier que $$A = \int_0^{2\pi} \gamma_1(t)\gamma'_2(t)\,dt$$

où γ_1 et γ_2 sont les fonctions réelles de classe C^1 définies sur $[0,2\pi]$ par la relation $\gamma(t) = \gamma_1(t)\vec{i} + \gamma_2(t)\vec{j}$.

1. Quitte à effectuer le changement de paramètre C^1-admissible $\theta : t \mapsto \frac{2\pi}{L}\int_0^t \|\gamma'(s)\|\,ds$,

montrer que l'on peut supposer que l'arc paramétré vérifie en outre la condition :

iv) pour tout $t \in [0,2\pi]$, $\|\gamma'(t)\| = \frac{L}{2\pi}$.

Prouver que dans ces conditions : $\frac{L^2}{4\pi^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left((\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2\right)dt$.

2. On note ψ_1 (resp. ψ_2) la fonction 2π-périodique de classe C^1 à valeurs réelles qui coïncide avec γ_1 (resp. γ_2) sur l'intervalle $[0,2\pi[$.

a. Soit f un élément de $\mathcal{C}$ à valeurs réelles. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $c_{-k}(f) = \overline{c_k(f)}$.

b. Établir les relations suivantes :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|\gamma'(t)\|^2\,dt = 2\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} k^2\left(|c_k(\psi_1)|^2 + |c_k(\psi_2)|^2\right)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_1(t)\gamma'_2(t)\,dt = -2\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} k\Im m\left(\overline{c_k(\psi_1)}\,c_k(\psi_2)\right).$$

En déduire que : $L^2 - 4\pi A = 8\pi^2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(k^2\left(|c_k(\psi_1)|^2 + |c_k(\psi_2)|^2\right) + 2k\Im m\left(\overline{c_k(\psi_1)}\,c_k(\psi_2)\right)\right)$

la série du second membre convergeant absolument.

Pour tout $k \geq 1$, établir que :

$$k^2\left(\left(|c_k(\psi_1)|^2 + |c_k(\psi_2)|^2\right) + 2k\Im m\left(\overline{c_k(\psi_1)}\,c_k(\psi_2)\right)\right) = |kc_k(\psi_1) - ic_k(\psi_2)|^2 + (k^2-1)|c_k(\psi_2)|^2.$$

Déduire de ce qui précède l'inégalité annoncée et montrer qu'il ne peut y avoir égalité que, si et seulement si, γ est un cercle de rayon $\frac{L}{2\pi}$.

Fin de l'énoncé.